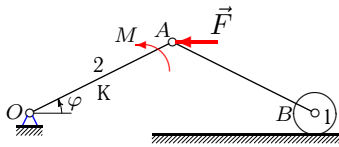


Казаков А., МЭИ, с12-02

Примеры решения механических задач с одной степенью свободы с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода:



1.37. К стержню OA шарнирного механизма приложен момент M , к шарниру A – горизонтальная сила F . Масса цилиндра m_1 , стержня OA – m_2 ; $AO = AB = a$. За обобщенную координату принять φ .

Решение

Треугольник $\triangle ABO$ равнобедренный, следовательно $\angle AOB = \angle ABO$
Выразим скорости тел через обобщенную координату:

Составим граф: $O \xrightarrow[\frac{a}{a}]{\varphi} A \xrightarrow[\frac{a}{a}]{-\varphi} B$

$$y: 0 = \dot{\varphi} \cos(\varphi)a + \omega_{AB} \cos(\varphi)a$$

$$\omega_{AB} = -\dot{\varphi}$$

$$x: V_{Bx} = -\sin(\varphi)\dot{\varphi}a - \sin(\varphi)\dot{\varphi}a = -2a \sin(\varphi)\dot{\varphi}$$

Составим граф: $O \xrightarrow[\frac{a}{a}]{\varphi} A$

$$V_{Ax} = -\dot{\varphi}a \sin(\varphi)$$

Составим граф: $O \xrightarrow[\frac{a/2}{a/2}]{\varphi} K$

$$V_{Ky} = \dot{\varphi}a/2 \cos(\varphi)$$

Кинетическая энергия:

$$T = 3/4 m_1 V_{Bx}^2 + 1/6 m_2 a^2 \omega_2^2$$

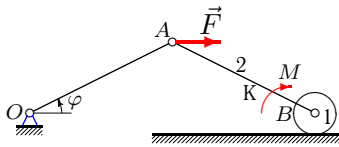
$$T = 3a^2 \sin^2 \varphi \dot{\varphi}^2 m_1 + m_2 a^2 / 6 \dot{\varphi}^2$$

$$T = \dot{\varphi}^2 / 2 (A + B \sin^2 \varphi)$$

Обобщенная сила:

$$Q = (M\dot{\varphi} + (-F)V_{Ax} - m_2 g V_{Ky}) / \dot{\varphi}$$

$$Q = M + F \sin(\varphi)a - m_2 g a / 2 \cos(\varphi)$$



1.38. К стержню AB шарнирного механизма приложен момент M , к шарниру A – горизонтальная сила F . Масса цилиндра m_1 , стержня AB – m_2 ; $AO = AB = a$. За обобщенную координату принять φ .

Решение

Треугольник $\triangle ABO$ равнобедренный, следовательно $\angle AOB = \angle ABO$. Выразим скорости тел через обобщенную координату:

Составим граф: $O \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{-\varphi} B$

$$y: 0 = \dot{\varphi} \cos(\varphi)a + \omega_2 \cos(\varphi)a$$

$$\omega_2 = -\dot{\varphi}$$

$$x: V_{Bx} = -\sin(\varphi)\dot{\varphi}a - \sin(\varphi)\dot{\varphi}a = -2a \sin(\varphi)\dot{\varphi}$$

Составим граф: $O \xrightarrow{\varphi} A$

$$V_{Ax} = -\dot{\varphi}a \sin(\varphi)$$

Составим граф: $B \xrightarrow{\pi-\varphi} K$

$$V_{Kx} = -3a/2 \dot{\varphi} \sin(\varphi)$$

$$V_{Ky} = a/2 \dot{\varphi} \cos(\varphi)$$

Кинетическая энергия:

$$T = 3/4 m_1 V_{Bx}^2 + m_2 V_K^2/2 + m_2 a^2 \omega_2^2/12$$

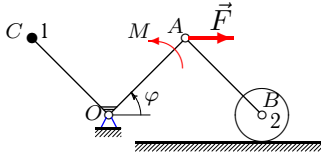
$$T = 3a^2 \sin^2 \varphi \dot{\varphi}^2 m_1 + (m_2 a^2/4)(9 \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) + m_2 a^2 \dot{\varphi}^2/12$$

$$T = \dot{\varphi}^2/2(A + B \sin^2 \varphi)$$

Обобщенная сила:

$$Q = (-M\omega_2 + FV_{Ax} - m_2 g V_{Ky})/\dot{\varphi}$$

$$Q = M - F \sin(\varphi)a - (m_2 g a/2) \cos(\varphi)$$



1.39. Стержни OC и OA жестко скреплены под углом 90° . В точке C расположена масса m_1 . Масса цилиндра — m_2 . К стержню OA приложен момент M . На шарнир A действует сила F . $OA = OC = AB = a$. За обобщенную координату принять φ .

Решение

Треугольник $\triangle ABO$ равнобедренный, следовательно $\angle AOB = \angle ABO$
 Выразим скорости тел через обобщенную координату:

Составим граф: $O \xrightarrow[\frac{a}{a}]{\varphi} A \xrightarrow[\frac{a}{a}]{-\varphi} B$

y : $0 = \dot{\varphi} \cos(\varphi)a + \omega_{AB} \cos(\varphi)a$

$\omega_{AB} = -\dot{\varphi}$

x : $V_{Bx} = -\sin(\varphi)\dot{\varphi}a - \sin(\varphi)\dot{\varphi}a = -2a \sin(\varphi)\dot{\varphi}$

Составим граф: $O \xrightarrow[\frac{a}{a}]{\varphi} A$

$V_{Ax} = -\dot{\varphi}a \sin(\varphi)$

Составим граф: $O \xrightarrow[\frac{a}{a}]{\varphi+\pi/2} C$

$V_{Cx} = -\cos(\varphi)a\dot{\varphi}$

$V_{Cy} = -\sin(\varphi)a\dot{\varphi}$

Кинетическая энергия:

$T = 3/4m_2V_{Bx}^2 + m_1/2V_C^2$

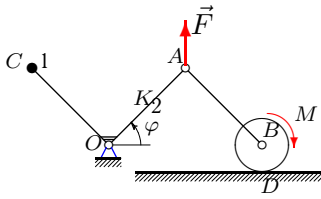
$T = 3a^2 \sin^2 \varphi \dot{\varphi}^2 m_2 + a^2 \dot{\varphi}^2 / 2$

$T = \dot{\varphi}^2 / 2 (A + B \sin^2 \varphi)$.

Обобщенная сила:

$Q = (M\dot{\varphi} + FV_{Ax} - m_1gV_{Cy}) / \dot{\varphi}$

$Q = M - F \sin(\varphi)a + m_1ga \sin(\varphi)$



1.40. Стержни OC и OA жестко скреплены под углом 90° . В точке C расположена масса m_1 . Масса OA — m_2 . К цилиндру радиуса R приложен момент M . На шарнир A действует сила F . $OA = OC = AB = a$. За обобщенную координату принять φ .

Решение

Треугольник $\triangle ABO$ равнобедренный, следовательно $\angle AOB = \angle ABO$. Выразим скорости тел через обобщенную координату:

$$\text{Составим граф: } O \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{-\varphi} B$$

$$y: \quad 0 = \dot{\varphi} \cos(\varphi)a + \omega_{AB} \cos(\varphi)a$$

$$\omega_{AB} = -\dot{\varphi}$$

$$x: \quad V_{Bx} = -\sin(\varphi)\dot{\varphi}a - \sin(\varphi)\dot{\varphi}a = -2a \sin(\varphi)\dot{\varphi}$$

$$\text{Составим граф: } O \xrightarrow{\varphi} A$$

$$V_{Ay} = \dot{\varphi}a \cos(\varphi)$$

$$\text{Составим граф: } O \xrightarrow{\varphi} K$$

$$V_{Ky} = \dot{\varphi}a/2 \cos(\varphi)$$

$$\text{Составим граф: } O \xrightarrow{\varphi+\pi/2} C$$

$$V_{Cx} = -\cos(\varphi)a\dot{\varphi}$$

$$V_{Cz} = -\sin(\varphi)a\dot{\varphi}$$

$$\text{Составим граф: } D \xrightarrow{\pi/2} B$$

$$V_{Bx} = -\omega_{BD}R$$

$$\omega_{BD} = 2a/R \sin(\varphi)\dot{\varphi}$$

Кинетическая энергия:

$$T = m_1/2V_C^2 + m_2a^2/6\dot{\varphi}^2$$

$$T = a^2\dot{\varphi}^2/2 + m_2a^2/6\dot{\varphi}^2$$

$$T = A/2\dot{\varphi}^2$$

Обобщенная сила:

$$Q = (-M\omega_{BD} + FV_{Ay} - m_1gV_{Cz} - m_1gV_{Cz})/\dot{\varphi}$$

$$Q = -M2a/R \sin(\varphi) + F \cos(\varphi)a + m_1ga \sin(\varphi) - m_2g \cos(\varphi)a/2$$